DE LA GEOMETRÍA A LA TOPOLOGÍA

José Ferreirós

DE LA GEOMETRÍA A LA TOPOLOGÍA

La «matematización de la naturaleza» y sus implicaciones filosóficas



Sevilla 2023

Colección Ciencia al Alcance
Núm.: 6

Impreso en papel ecológico
Impreso en España-Printed in Spain

ISBN 978-84-472-2435-7
Depósito Legal: SE 640-2023

Motivo de cubierta: José Olmedo Reguera
Diseño de cubierta: Porvenir 10
Maquetación: Cuadratín Estudio
Impresión: Podiprint

Índice

Apéndices

Introducción

Sólo Euclides ha visto la belleza desnuda. Así comienza un poema de 1923, de la autora norteamericana Edna St. Vincent Millay. Y ciertamente hay algo de fantástica belleza en la geometría, y en particular en el Libro I de los *Elementos*, que ha fascinado a tantas personas, a tantas mentes, a lo largo de los siglos. El famoso arquitecto del siglo XVII Sir Christopher Wren, hablando de arquitectura, define la belleza como «una armonía de los objetos, que produce placer a los ojos». Y afirma que hay dos causas de la belleza, la una natural y la otra por costumbre: «Natural es la [derivada] de la Geometría, y consiste en uniformidad (esto es, igualdad) y *proporción*»; por costumbre es la que nos producen objetos que suelen complacernos por otras causas, igual que podemos amar las cosas que nos son familiares sin más. «Y aquí se halla –sigue diciendo– la gran ocasión del error, aquí se pone a prueba el juicio del arquitecto: mas siempre *la prueba verdadera es la belleza natural o geométrica*»[1]. Se ha dicho que tener esto siempre ante la vista es lo que permitió a Wren levantar un monumento tan noble como la Catedral de Saint Paul.

Hoy, por supuesto, ya no pensamos como Wren; tenemos una relación mucho más compleja con el arte y con las formas geométricas. Pero curiosamente este proceso ha ido en paralelo con una complicación cada vez mayor de las formas que estudian los matemáticos bajo el rótulo de geometría. El desarrollo histórico de la

1. Traducciones mías en todos los casos, salvo que se indique lo contrario o se cite una edición en español. E. St Vincent Millay, *Collected poems*. New York: Harper & Row, 1956. C. Wren, *Tract I on Architecture*. Disponible online en Reading Design: https://www.readingdesign.org/tract-i.

geometría es, también, un asunto fascinante y que apetece compartir con un público amplio. Creo que esto es fácil, en la medida en que hay algo sumamente atrayente y «apelativo» –por así decir– en las cuestiones geométricas. Quizá se deba a que las capacidades cognitivas humanas están dedicadas, en gran medida, a la cognición visual y espacial: una gran parte de nuestra corteza cerebral se dedica al procesamiento visual; ya se ha dicho siempre que *una imagen vale más que mil palabras*, lo cual expresa esa espontánea atracción que sentimos por lo visual, lo espacial y lo geométrico.

Como nos recuerda el escritor ruso Yevgueni Zamyatin, el desarrollo del pensamiento geométrico ha visto auténticas revoluciones:

> Dos estrellas negras, muertas, colisionan en un choque inaudible, ensordecedor, y dan luz a una nueva estrella: esto es revolución. Una partícula se separa de su órbita y, al estallar en un vecino universo atómico, da nacimiento a un nuevo elemento: esto es revolución. Lobachevskii rompe los muros del milenario mundo euclidiano con un solo libro, abriendo camino hacia innumerables espacios no euclidianos: esto es revolución[2].

Revoluciones que no han afectado solo a las matemáticas, sino al pensamiento humano en general.

El resultado final de ese desarrollo, a día de hoy, ha sido toda una pluralidad de geometrías, en la cual la geometría euclidiana queda reducida a un caso particular (por importante que sea), una opción extrema. En el otro extremo podemos encontrar las ideas de la topología, una rama de las matemáticas tremendamente *moderna* (si es que aún se puede utilizar esta cansada palabra), esto es, desconocida casi antes del siglo XX. La topología está de moda, lo ha estado por ejemplo desde hace décadas en los discursos de los filósofos estructuralistas y postestructuralistas franceses, y de todo tipo de intelectuales (basta hacer una búsqueda en google con palabras como «topología y literatura» o «topología y psicoanálisis» para comprobarlo). Pero también está de moda en círculos científicos, como demuestra sin ir más lejos el Premio Nobel en Física de 2016, otorgado a Thouless, Haldane y Kosterlitz por descubrimientos teóricos sobre las «fases topológicas» de la materia.

Entender el proceso que ha llevado desde la geometría en la Antigüedad a la topología en el siglo XX es una buena manera de

---

2. Y. Zamyatin, «On Literature, Revolution, Entropy, and Other Matters» (1923), en *A Soviet Heretic*, ed. Ginsburg (Zamyatin 1970).

entender cómo ha evolucionado el pensamiento científico y la comprensión científica de los fenómenos a lo largo de la historia. Se ha dicho muchas veces que la «matematización» fue una de las claves más esenciales para la ciencia moderna. Alexandre Koyré, quien acuñó en 1943 la idea de la Revolución Científica –«la revolución más profunda que ha logrado o sufrido la mente humana» desde Grecia, opinaba–, argumentó que el siglo XVII experimentó un cambio revolucionario en el marco mismo y los patrones del pensamiento. En su opinión, esto se debía a dos cambios filosófico-científicos fundamentales e interconectados: la «destrucción del Cosmos» y la «geometrización del espacio»[3]. Es decir, desaparecía la idea del mundo como un todo ordenado jerárquicamente, cuyo orden expresaba una escala de valores y de perfección; surgía la imagen de un universo infinito, homogéneo, unificado por los átomos y las leyes naturales, que se aplican en todas partes por igual. Era «el reemplazo de la concepción aristotélica del espacio –un conjunto diferenciado de lugares en el mundo– por la geométrica euclidiana –una extensión esencialmente infinita y homogénea– que a partir de ahora será considerada idéntica con el espacio real del mundo».

Podríamos criticar y corregir alguna de estas afirmaciones de Koyré, por ejemplo, su identificación demasiado rápida de la geometría de Euclides con el espacio de Descartes y Newton. Podríamos revisar esa concepción de la Revolución Científica, que ha sido muy criticada. Pero no es ese el objetivo de estas páginas.

Quedémonos de Koyré simplemente con la tesis de que la «geometrización» o «matematización» de la comprensión del mundo es un elemento capital en el nacimiento de la ciencia moderna; ejemplos muy evidentes de esto son las contribuciones de Galileo y de Kepler. Ahora bien, la matemática de las estructuras, típica del siglo XX y uno de cuyos paradigmas es la topología, da lugar a modelos matemáticos muy diferentes de los modelos euclidianos que empleaba Galileo. Trataré de presentar estos cambios de una manera clara, ilustrando la variación en las formas de pensar la matemática, y en el sentido de la «matematización» de los fenómenos, entre la geometría y astronomía antiguas, los enfoques matemáticos de Galileo y Newton, y las concepciones estructurales del siglo XX.

3. Koyré, «Galileo and the Scientific Revolution of the Seventeenth Century» (1943).

Sobre todo, trataremos de analizar las implicaciones epistemológicas de estos cambios[4]. Contra lo que pensaron los empiristas lógicos, contra la idea de que las verdades matemáticas se reducen a tautologías, defenderé que las matemáticas aportan contenido sustancial a las teorías científicas. El gran geómetra Felix Klein, célebre por su Programa de Erlangen, fue también un científico muy preocupado por la mejora de la educación matemática. Y decía[5]: quienes entienden del tema estarán de acuerdo en que incluso la base misma sobre la que descansa la explicación científica de la naturaleza resulta ininteligible a menos que uno haya aprendido los elementos del cálculo diferencial e integral, así como la geometría analítica. La pretensión de estas páginas es contribuir a esa tarea, facilitar el acceso a algunas ideas-fuerza, empleando para ello el camino de la historia.

Y es que la historia, bien empleada, puede convertirse en guía de una comprensión conceptual, que es el complemento perfecto del trabajo, más árido, de aprender sobre fórmulas y problemas. Es con esa esperanza que he escrito este pequeño libro, confiando en que la manera de abordar las cuestiones las haga accesibles a un público amplio. No está escrito para matemáticos, sino para personas curiosas que busquen entender algo más del papel que las matemáticas tienen, hoy en día, en el pensamiento[6]. Pero tampoco se ha escrito buscando una divulgación fácil, sino más bien con la ambición de transmitir detalles importantes acerca del modo de pensar en ciencia y matemáticas. Ojalá que haya tenido algo de acierto en el intento.

En cuanto a la estructura del librito, es sencilla. Lo escribí pensando en cuatro partes, y, acordándome de los libros de Galileo, las he llamado «jornadas». Son pues cuatro jornadas, que van acompañadas por cinco apéndices (de lectura independiente); y hay también

---

4. La epistemología (del griego *episteme*, saber) es la rama de la filosofía que estudia el conocimiento en general –su naturaleza, posibilidades y alcance–, con especial atención al conocimiento científico. Aquí nos interesa sobre todo entender qué efectos tienen esos cambios para el desarrollo del conocimiento científico.

5. F. Klein, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 11, 1902, pág. 131.

6. Estas páginas son una elaboración sobre contenidos que discutí en un curso breve, dentro del Master Propio de la Univ. Complutense de Madrid, *Ciencia y Filosofía: construyendo el futuro*. Agradezco a Ana Rioja y Julia Téllez su iniciativa, y a Guillermo Curbera, Ismael Ordóñez, María de Paz, Javier Anta (así como a un evaluador anónimo) su lectura y comentarios de los borradores. Cecilia Neve me prestó una gran ayuda con la realización de la mayoría de las figuras.

un descanso reflexivo al final de la Jornada 3.ª. Los apéndices sirven sobre todo al propósito de profundizar un poco más en las ideas matemáticas. Además, al final de cada jornada se encontrará una recomendación bibliográfica, para los que quieran ampliar ideas.

Jornada 1.ª
Geometría sintética: de la Antigüedad a Galileo

Podría este librito haberse titulado también *De las figuras a las estructuras*, ya que la geometría antigua se centra en el estudio de las propiedades de las figuras, tanto planas como tridimensionales, mientras que la geometría más actual (y la topología) tiene como base la idea de estructura matemática. En todo caso, al hilo de esa cuestión, se trata de discutir diversas formas de comprensión matemática de fenómenos naturales –ligadas a diversos modos de concebir las matemáticas– y en especial los grandes cambios que pueden advertirse desde Galileo y Kepler (leyes de caída de los cuerpos y del movimiento de los planetas) a, digamos, el físico teórico Edward Witten[7]. En tiempos de Galileo, la geometría era el núcleo básico del pensamiento matemático: en esencia se trataba de la geometría de Euclides, sin cambios, el único sistema geométrico que fue estudiado en detalle hasta el siglo XIX; pero en los dos últimos siglos, la geometría se ha hecho plural, mucho más abstracta, y ha desembocado en teorías como la topología, abriendo posibilidades inéditas para la especulación científica.

Me gustaría comenzar con una breve referencia que resaltará la relevancia del tema que propongo: los Premios Nobel en Física de 2016. El premio de ese año se dividió en dos mitades, concediéndose

---

7. Menciono a este físico teórico por el gran impacto que ha tenido entre los matemáticos, además de la importancia de sus ideas; en 1990, Witten fue el primer físico que recibió la prestigiosísima Medalla Fields.

la primera a David J. Thouless, y la otra de forma conjunta a F. Duncan, M. Haldane y J. Michael Kosterlitz «por sus descubrimientos teóricos de las transiciones de fase topológicas y las fases topológicas de la materia». Como vemos, se ha llegado a hablar de *fases topológicas* de la materia, una forma de materia «exótica» que se da en condensados cuánticos a temperaturas cercanas al 0 absoluto[8]. Cualquier día nos encontraremos con aplicaciones prácticas de estos estados topológicos, que afectarán a nuestra vida diaria. ¿Pero qué es una propiedad topológica? La topología es algo así como aquello en lo que se convierte la geometría en el límite, cuando se va prescindiendo de muchas propiedades típicas de nuestra geometría: distancias, paralelismo, rectilinearidad, etc. Si la geometría tradicional estudiaba las figuras y sus medidas, la topología sería algo así como el límite en que se estudia lo que queda cuando ya no hay medidas ni figuras; cuando los cuerpos pierden sus figuras y solo quedan estructuras muy profundas y básicas…

Pero no, no podemos afrontar así una explicación de lo que es topología. Parecería demasiado incomprensible, demasiado difuso. Será mucho mejor ir aproximándonos a dicho tema a través de un recorrido por la historia de la geometría. Un recorrido en el que revisaremos –bastante rápidamente– 2500 años de historia del pensamiento, y en el que solo al final (Jornada 4.ª, pág. 67) encontraremos una explicación de qué es la topología. Me esforzaré por hacerlo sin fuegos artificiales ni cortinas de humo, buscando ante todo la claridad, la divulgación sin perder demasiada precisión.

Una primera pregunta que podríamos hacernos es: ¿cómo llegaron a plantearse problemas geométricos? La respuesta convencionalmente aceptada es que había problemas prácticos, en sociedades ya avanzadas como la babilonia o la egipcia, que requerían conocimiento geométrico. Herodoto ligó el origen de la geometría en Egipto con el hecho de que cada año, tras las inundaciones del Nilo, se producían conflictos por haber desaparecido las lindes de las tierras, y se hacía necesario volver a delimitar terrenos. No es muy seguro que ese fuera el origen, pero la idea es clara. En la antigua Babilonia, hacia el 1800 antes de nuestra era, ya se empleaba la llamada *fórmula del agrimensor* para calcular el tamaño de un campo (y a partir de ahí las plantas y el grano que podría sustentar). Sin embargo, los orígenes de la matemática siempre estuvieron ligados al mundo de lo simbólico, de lo misterioso, y no solo a lo utilitario.

---

8. Para más detalles, puede verse la información oficial del premio en el sitio Nobel: https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016/summary/

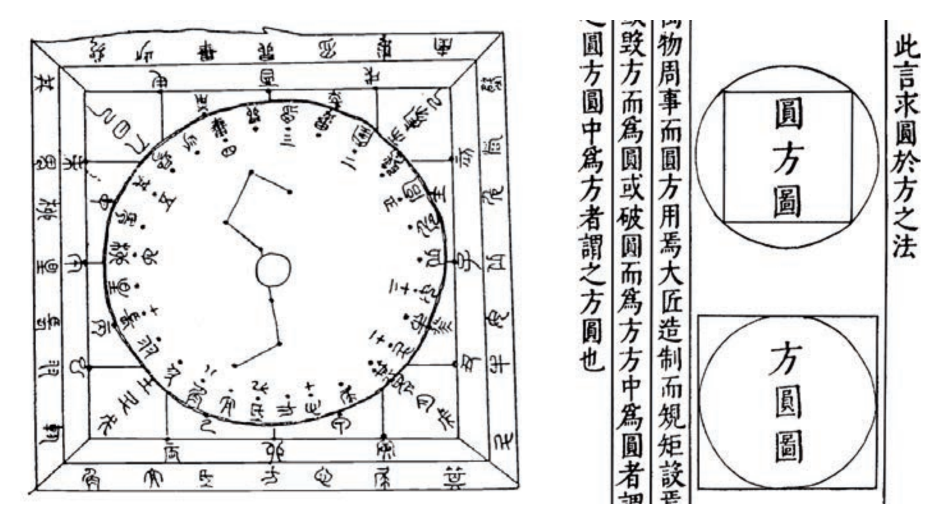


Figura 1. A la izquierda, un modelo del cosmos Shi, donde se juega con círculo y cuadrado: «El Cielo es un círculo y la Tierra es un cuadrado…». A la derecha, relaciones entre ambas figuras en el *Zhou Bi,* tratado clásico de astronomía

Pongo un hermoso ejemplo. En el Lejano Oriente, donde mucho más tarde surgiría China (la primera unificación bajo el imperio Qin es del 221 A.E.C.), durante todo el primer milenio ane existían ideas cosmológicas muy interesantes. El poder sobre la tierra –el de los señores guerreros, y luego el del emperador– se asociaba estrechamente a una relación privilegiada con lo celeste. Y Tierra y Cielo quedaron asociados con dos figuras simétricas especialmente llamativas: la Tierra es un cuadrado, el Cielo es un círculo[9]. Pues bien, esto condujo al estudio de las relaciones entre un círculo y el cuadrado circunscrito (figura 1, tomada del tratado canónico *Zhou Bi* sobre astronomía). Basta investigarlo un poco para advertir que, si tomamos el lado del cuadrado como unidad, el contorno del cuadrado mide 4, pero el círculo debe medir poco más de 3. ¿Cuánto más? Nos hemos topado con el problema de la medición del círculo o, dicho de otro modo, de calcular el valor del número π (pi).

En la época de la dinastía Qin (siglo III A.E.C.) ya existía una gran obra matemática, los *Nueve capítulos de procedimientos matemáticos*, cuyo primer capítulo incluye métodos para calcular π, esto es, la *ratio* o proporción entre las longitudes del diámetro y la circunferencia de un círculo. Cinco siglos más tarde, el Arquímedes chino,

9. Entre las magníficas figuras de terracota de Xian, se conserva un poderoso guerrero sobre un carro, en bronce, donde simbólicamente el carro es cuadrado y el jefe guerrero está protegido por un palio en forma de círculo.

llamado Liu Hui, analizó dichos métodos con una perspectiva crítica muy avanzada; también hizo cálculos concretos que venían a dar como valor aproximado 3,1415. A finales del siglo V, el matemático y astrónomo Zu Chongzhi calculó el valor de π con precisión aún mayor, lo que venía a dar 3,1415926; y ofreció dos aproximaciones racionales de π, a saber: 22/7 (la que ya había encontrado Arquímedes) y 355/113 (que es una aproximación magnífica)[10]. Estos autores tenían clara la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de pi. Que hayan realizado esa distinción indica un conocimiento matemático sumamente sofisticado.

Vemos cómo se llega a problemas matemáticos complejos, partiendo de cuestiones mucho más simples, algunas de naturaleza práctica (contabilidad, arquitectura, reparto de tierras) y otras de naturaleza simbólica (la relación cuadrado-círculo, ligada a las relaciones Tierra-Cielo y por tanto al poder y el saber).

La matemática: demostración y aplicación

¿Qué es la matemática? ¿Por qué nos interesa filosóficamente? El filósofo Ian Hacking habla de dos fenómenos fundamentales, que son esenciales a la *experiencia de hacer matemáticas* y que despiertan el interés filosófico[11]: se trata de la demostración, que ya fascinó a Platón y a los griegos en general, y la cuestión de las aplicaciones, muy destacada por Kant. Vamos a comentar ambos aspectos.

Empecemos pues, *demostrando*. No es posible entender lo que las matemáticas significan para nosotros, lo que han significado en la historia de la cultura, en la historia de muy diversas civilizaciones (la helenística, la islámica, la europea moderna, etc.), sin pasar por la experiencia de demostrar. Lo cual, por cierto, nos sugiere que hay un problema serio en la educación secundaria de hoy en día; porque no se hacen demostraciones en los Institutos y Colegios. En secundaria, la matemática se trata como una ciencia que nos da recetas para resolver problemas, pero no como la ciencia de las demostraciones. Parece como si hubiéramos retrocedido a la época babilonia. Platón, Euclides y Kant estarían sumamente disgustados. Desde este punto de vista, ha sido una mala decisión la de no enseñar más

10. Habrá que esperar a inicios del siglo XV para encontrar cálculos todavía más precisos (los de Jamshīd al-Kashi, norte de África) o casi a 1600 en Europa (François Vieta y Ludolph van Ceulen).

11. En su libro, *Why is there philosophy of mathematics at all*? (Hacking 2014).

la geometría al modo sintético, la geometría de Euclides. Cientos de generaciones humanas se han educado en la demostración, pero desde 1960 aproximadamente ya no es así. Habría que corregirlo.

Ya que hablamos de geometría, consideremos algunas demostraciones muy antiguas, pero no por ello menos interesantes. Hay un teorema sencillo de Euclides que interesó mucho a filósofos como Aristóteles y Kant: la suma de los ángulos de un triángulo es 180° –o «dos (ángulos) rectos», como decían los griegos–. Claro está que todos sabemos que eso es cierto, pero el punto clave es que podemos demostrarlo: podemos justificarlo y certificar que es correcto, sin dejar lugar a dudas. Es el teorema número 32 del libro I de los *Elementos*.

Lo voy a abordar primero de una forma quizá más primitiva, y solo después veremos cómo lo demuestra Euclides (de modo más elegante). Pero en primer lugar, un argumento intuitivo que puede haber sido la manera en que se descubrió el resultado. Nos basaremos en un principio geométrico que parece muy intuitivo: un rectángulo se puede pensar siempre como la unión de dos triángulos rectángulos, los que nos da una diagonal; y esos dos triángulos son congruentes (sus lados son iguales dos a dos, sus ángulos son también iguales).

Tracemos ahora un triángulo cualquiera ABC; por ejemplo, el de la figura. Trazamos la altura, desde C a la horizontal AB, digamos que la corta en el punto F; esta línea CF nos determina dos triángulos rectángulos. Completamos los rectángulos a un lado (ADCF) y a otro (BECF), y ahora podemos aplicar el principio citado antes (que consideramos evidente): los triángulos en que cada uno de esos rectángulos queda cortado, por su diagonal, son congruentes. Y esto significa que, en torno al punto C, tenemos los tres ángulos del triángulo ABC formando 180° o dos rectos. QED (*quod erat demonstrandum*, la fórmula célebre en latín que significa: «como había que demostrar»).

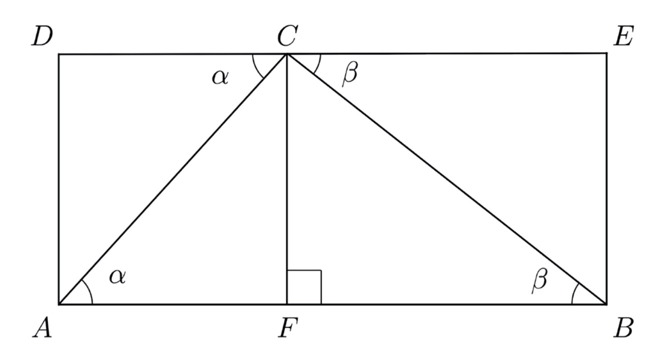


Figura 2. Una manera algo «primitiva» de demostrar el teorema de la suma de ángulos

Veamos ahora otra demostración, la de Euclides. Coged papel y lápiz. Dado el triángulo ABC (pintadlo como queráis), podemos prolongar el lado AB en línea recta, y por el punto B podemos trazar una paralela al lado AC. Consideremos ahora lo que sucede en torno al punto B: hay tres ángulos, que juntos suman «dos rectos», 180º; uno de ellos pertenece al triángulo, llámale β; otro está comprendido entre la paralela y la recta AB, y por tanto tiene que ser igual al ángulo α interior del triángulo que corresponde al vértice A. ¿Qué pasa con el tercer ángulo? Miremos la figura formada por la recta AC, su paralela, y el lado BC: son dos paralelas y una recta que las corta, de modo que los ángulos alternos internos son iguales entre sí[12]. Por tanto, el tercer ángulo es igual al ángulo γ del triángulo que corresponde al vértice C. QED. Los tres ángulos en torno al punto B son iguales a los tres ángulos del triángulo, y suman 180º.

Lo ideal sería que el lector acompañase esta primera jornada con la lectura de Euclides, de *Elementos* libro I al completo. Una lectura hermosa y fascinante. La obra comienza con definiciones de los conceptos geométricos básicos: punto, recta, ángulo, círculo, paralela, etc. Luego vienen los cinco famosos *postulados*, que en épocas recientes se llaman axiomas, y algunas «nociones comunes» que también se emplean en las demostraciones (por ejemplo, que el todo es mayor que la parte). Y a continuación, las proposiciones o teoremas, comenzando por la construcción de un triángulo equilátero de lado dado, y llegando el teorema 48; y por cierto, el 47 es el celebérrimo «teorema de Pitágoras» (conocido ya por los babilonios, e, independientemente de los griegos, también por los antiguos chinos).

Los postulados de Euclides son intuitivamente muy claros, y, una vez que los hemos aceptado, el proceso de inferencias lógicas, parcialmente basadas en los diagramas, nos conduce a la verdad de todas las 48 proposiciones del libro I. No hay lagunas, los argumentos se apoyan en parte en condiciones exactas claramente estipuladas, en parte en detalles evidentes (y «robustos», por así decir) de los diagramas: el desarrollo deductivo-demostrativo es magnífico[13]. Lo que llamó la atención de muchos griegos –Platón y tantos otros– es que

12. Esto es un teorema que también requiere demostración: se trata de la proposición 29 de los *Elementos* de Euclides. El lector escéptico debe consultar su demostración (o bien considerar cómo el principio sobre rectángulos discutido en la página anterior viene a darnos una demostración suya). En el curso de la prueba del teorema 32, podemos por supuesto hacer uso de un teorema anterior (anteriormente establecido) como es el 29.

13. Habría mucho que añadir sobre el papel de los diagramas, que es esencial en la matemática de los griegos; ciertas propiedades geométricas se obtienen

al demostrar estamos participando en un proceso racional que *se nos impone*. Uno no puede pensar lo que quiere, tiene que aceptar aquello que se establece deductivamente; es una experiencia fundamental de objetividad, de trascender las meras opiniones. Es en realidad una parte fundamental de lo que los griegos llamaron el *Logos*, ser partícipes de la razón común, que nos conduce inevitablemente a ciertas conclusiones. Todos hemos estudiado el célebre «paso del mito al logos» en Grecia, pero a menudo no se resalta lo bastante el papel central de las matemáticas en esa transformación, en las experiencias que la impulsaron.

Los postulados de Euclides:

1. Postúlese el tirar una línea recta desde cualquier punto hasta cualquier punto.
2. Y el extender una recta finita continuamente en línea recta.
3. Y sobre cualquier centro y distancia [radio] describir un círculo.
4. Y que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si cayendo una línea recta sobre dos rectas, hiciere los ángulos internos de una misma parte menores que dos rectos [180º], ambas rectas extendidas indefinidamente, se encontrarán de la parte en que están los [ángulos] menores que dos rectos.
6. Y que dos líneas rectas no encierran superficie.[14]

Los postulados de Euclides son otras tantas *peticiones* o *admisiones* (por parte de los interlocutores): indican cosas que es posible *hacer*, y se emplean al construir y desarrollar los diagramas. Así, admitimos que es posible trazar una línea recta entre dos puntos cualesquiera; que es posible trazar un círculo, sea cual sea el punto y el segmento que nos den, etc. En realidad, Euclides distingue entre

directamente del diagrama, y esto explica por qué algunas críticas a Euclides de los matemáticos del siglo XX son inadecuadas (ver Manders, 2008).

14. Tomo la traducción de R. Zamorano, *Los seis libros primeros de la Geometría de Euclides* (1576), fol. 11-12; esto explica por qué aparecen seis postulados y no cinco. Se ha modificado algo la traducción, para facilitar la comprensión, y se ha comparado con la edición de Gredos, págs. 197-198.

«postulados» y «nociones comunes» (nosotros les llamaríamos a todos *axiomas*): los postulados (salvo el 4.º) indican lo que es posible hacer al construir y desarrollar los diagramas; las nociones comunes indican principios básicos que tienen que ver con magnitudes como las longitudes o las áreas[15].

Recomiendo al lector que se familiarice con un buen número de auténticas demostraciones matemáticas, para lo cual –como he dicho– sería ideal dedicar tiempo a leer el Libro I de Euclides. Os pido en este punto que leáis con calma el Apéndice 1 (pág. 95), para reforzar la idea de demostración. De los *Elementos*, recomiendo en especial consultar las Defs. 1-5 más la 23; leer luego los Postulados; y estudiar con calma algunas de las Proposiciones más famosas, en especial la Prop. 1, la 5, la 20, la 27, la 32 (que los ángulos de un triángulo hacen 180º) y la 47 (teorema de Pitágoras).

Veamos una demostración del Teorema de Pitágoras que *es diferente* a la de Euclides. Como recordaréis, dice el teorema que:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Hay muchas maneras de demostrar este famoso teorema, el cual, por cierto, se conocía mucho tiempo antes de Pitágoras, y no fue un descubrimiento griego. Aunque la prueba que sigue no es la euclídea, va a ser una demostración puramente geométrica, sin utilizar nada de álgebra: así es como pensaban este resultado Euclides y sus colegas.

Consideremos un triángulo rectángulo cualquiera, por ejemplo, el que aparece en mitad de la figura 3: lo llamaremos τ (*tau*). Podemos disponer cuatro copias del triángulo formando un cuadrado como el de la izquierda, en cuya mitad vemos que surge un cuadrado: precisamente el cuadrado de la hipotenusa del triángulo rectángulo τ (la hipotenusa es el lado mayor, que se encuentra frente al ángulo recto). Esto es, el cuadrado de la izquierda es la suma del cuadrado α y cuatro copias de τ.

Ahora, es posible cambiar la disposición de las cuatro copias de τ, manteniendo el mismo cuadrado grande. Obtenemos la figura de la derecha, donde el cuadrado β tiene como lado un cateto de τ, y el

---

15. Ejemplos de *nociones comunes*: 1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí. 2. Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales. 8. El todo es mayor que la parte.

otro cuadrado pequeño γ tiene por lado el otro cateto. Esto es, el cuadrado grande de la derecha es la suma de dos cuadrados, β y γ, y cuatro copias de τ.

Los dos cuadrados grandes son iguales; si a ambos les restamos cuatro veces τ, los restos serán también iguales[16]. Por tanto, el cuadrado α tiene que ser igual a la suma de los cuadrados β y γ. Dicho de otro modo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. QED.

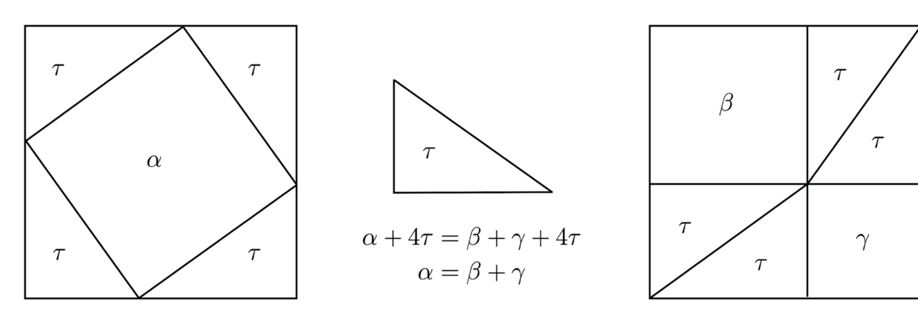


Figura 3. Una demostración del teorema de Pitágoras

De nuevo, ruego al lector que mire con calma el Apéndice 1 (pág. 95). Pero ahora, siguiendo a Hacking, pasemos al tema de las *aplicaciones* de las matemáticas. Durante el siglo XVII, muchos autores centrales (Descartes, Newton, Huygens, etc.) admitieron sin dudar que la geometría de Euclides describe con precisión el espacio físico tridimensional. El sistema de Euclides se consideraba cierto e indubitable: hay un solo espacio físico (el de la astronomía y la física, sin distinciones entre lo «terrestre» y lo «supralunar»)[17] que coincide perfectamente con las verdades intuitivas de la geometría axiomática. Para Newton, el espacio es una entidad independiente, absoluta, que no se ve afectada por los sucesos físicos, pero que los determina (pensemos en la primera ley de Newton: todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo que alguna fuerza opere sobre él y haga cambiar su estado). Con esto, la geometría se convertía en el primer capítulo de la

16. Este principio es precisamente una de las «nociones comunes» de Euclides, la n.º 3.

17. En la cosmología de Aristóteles, adoptada por muchos en la Edad Media, la distinción entre lo terrestre o «sublunar» y las esferas de la Luna y sucesivas, era radical; no podía hablarse de una homogeneidad entre esos ámbitos.

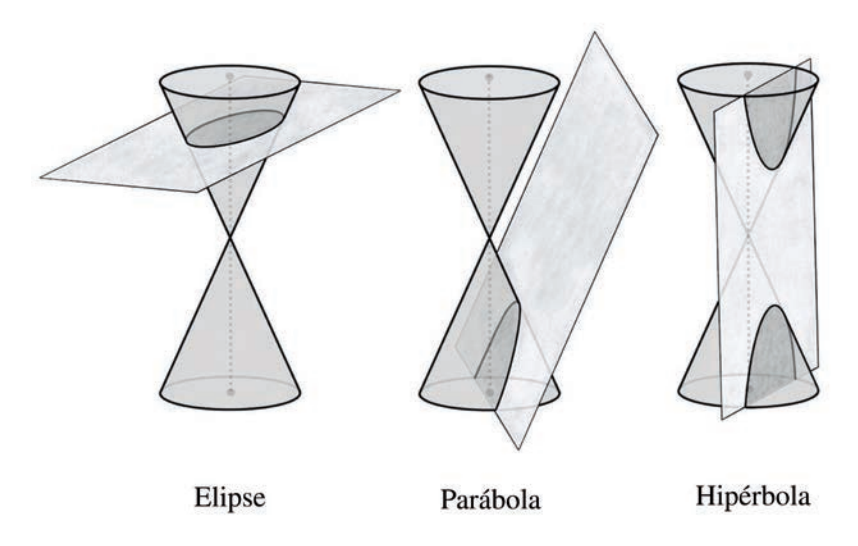


Figura 4. Cónicas: la curva obtenida (sombreado oscuro) depende de la inclinación del plano que corta al doble cono. En b, el plano es paralelo a una de las rectas generatrices del cono; en c, es paralelo al eje del cono

mecánica, y en un elemento clave de la comprensión matemática de los fenómenos naturales.

Naturalmente, esta idea había aparecido ya en la obra de Galileo –quien matematizó al modo de Euclides las leyes de la caída de los cuerpos– y de Kepler –quien completó el sistema copernicano con sus tres leyes del movimiento planetario–. Curiosamente, tanto Galileo como Kepler encontraron aplicación física muy notable a una parte de la geometría que los griegos habían estudiado de manera teórica, puramente matemática. Se llama «cónicas» a las líneas curvas que se obtienen cortando un cono con un plano (figura 4): estas líneas son las elipses (a), hipérbolas (c) y parábolas (b), cuyas propiedades fueron estudiadas en una obra difícil de Apolonio de Pérgamo, en el siglo III A.E.C. Como es bien sabido, Galileo encontró que la trayectoria de un proyectil –digamos, una bala de cañón– es precisamente una parábola (si ignoramos los efectos de la fricción); y Kepler encontró que las trayectorias de Marte y los demás planetas se ajustan con mucha precisión a la figura de la elipse[18].

El porqué de esta peculiar «armonía preestablecida» entre los movimientos de los planetas y las propiedades de figuras geométricas perfectas resultó un misterio hasta que Newton publicó su gran

18. Galileo, *En torno a dos nuevas ciencias* (1976 [1638]); Kepler, *Astronomia nova* (1992 [1609]).

obra, *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687). De hecho, Newton justificó a la vez la ley de Galileo y las leyes de Kepler, unificándolas en la síntesis grandiosa de lo celeste y lo terrestre bajo la Ley de Gravitación Universal. El genial científico pudo demostrar que los cuerpos que interaccionan mecánicamente bajo la Ley de Gravitación Universal describirán órbitas que se ajustan a la figura de las cónicas, de manera que, si la órbita es cerrada (vuelve sobre sí misma), será una elipse. El modelo matemático basado en las fuerzas de gravedad hacía comprensibles las tres leyes de Kepler, que aparecían como consecuencias matemáticas de la Ley de Gravitación Universal. La manera en que Newton demostró estos teoremas era, de nuevo, muy similar al estilo matemático de Euclides.

Podemos explicarlo de manera más intuitiva recurriendo al dibujo del propio Newton (figura 5). La Luna es similar a un proyectil, tal como sugiere la figura. Podemos imaginar un proyectil que es lanzado desde el monte V, el cual caerá a tierra al cabo de cierto tiempo; si aumenta el impulso inicial, el proyectil cae cada vez más lejos. Un gran impulso podría llevarlo hasta el punto C, en las antípodas; y habrá un nivel de impulso tal, que su velocidad de escape sea justamente adecuada para que vuelva hasta V, o sea, para mantenerlo en órbita cerrada alrededor de la Tierra. Cabe entender que esto es lo que hay detrás de la famosa anécdota (o cuento) de la manzana que cayó encima del joven Newton: al ver caer la fruta, Newton se habría dado cuenta de que la Luna es como una manzana que

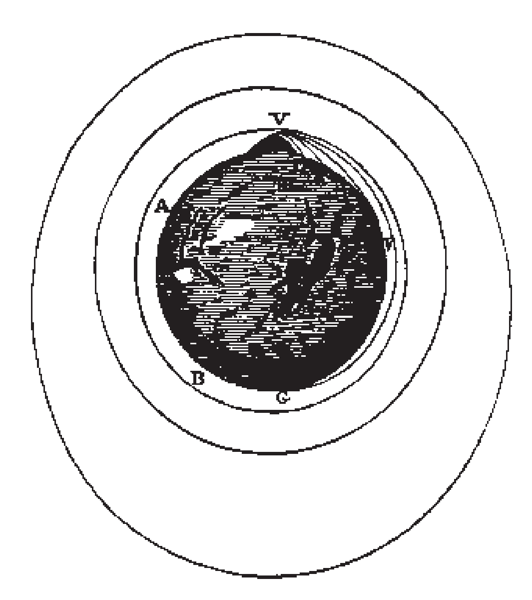


Figura 5. Experimento mental de Newton, en su obra *El sistema del mundo,* para mostrar que el movimiento de un proyectil puede convertirse en el de un satélite

cae permanentemente hacia la Tierra, solo que su velocidad inercial le permite mantenerse en órbita.

Bueno, en realidad los movimientos de la Luna son bastante complicados; volveremos a hablar de ellos más adelante.

El ejemplo de las cónicas –Apolonio estudiando sus propiedades en abstracto hacia el 250 A.E.C., Kepler aplicándolas a los planetas en 1609, casi dos mil años más tarde– se ha mencionado una y otra vez para resaltar la sorprendente efectividad de las matemáticas. No importa, dicen muchos matemáticos, que una teoría de las que ellos estudian parezca muy abstracta y alejada de la realidad; andando el tiempo, surgen aplicaciones tan magníficas como la del caso de las cónicas. Lo mismo pasó con la teoría de grupos y el super abstracto «espacio de Hilbert», cuando fueron aplicados en el terreno de la física cuántica durante los años 1930.

¿Cómo explicar esa «armonía preestablecida»? He ahí un problema filosófico de primera magnitud, que ha ocupado a mentes científicas y filosóficas durante siglos y siglos. Claro está que cabe recurrir a la explicación de Platón, «el *dios* geometriza», los pensamientos divinos se rigen por ideas matemáticas, y el orden del Mundo se ha creado siguiendo dichas ideas (como explicó en el *Timeo*). Cuando concebimos y demostramos el teorema de Pitágoras, nuestros pensamientos coinciden a la perfección con los pensamientos de Dios. Y como este universo físico es obra de Dios, nada hay de extraño en que los fenómenos se rijan por regularidades matemáticas.

Muchos autores de la época moderna han tenido dificultades en aceptar una explicación tan metafísica como esa. Algunos han intentado dar cuenta de la geometría al modo aristotélico, como una abstracción que se obtiene partiendo de los fenómenos materiales, un sistema conceptual con origen en lo empírico. Pero esta forma de abordarlo también tropieza con problemas, sobre todo porque las *formas ideales* de la geometría son perfectas: como se ha repetido una y mil veces, el círculo perfecto no se encuentra nunca en la realidad; y lo mismo vale para la elipse o la parábola[19], o para una simple recta.

Kant encontró una manera alternativa y más sofisticada de explicar la validez empírica de la geometría, en su famosa doctrina de las «formas a priori de la intuición» y de las verdades «sintéticas a priori». Las verdades geométricas no son de origen empírico, pero

19. Las órbitas planetarias son elípticas en una primera aproximación, pero la propia teoría de Newton implica que han de sufrir desviaciones debido a atracciones entre unos planetas y otros: tampoco aquí encontramos la elipse perfecta.

tampoco representan un mundo divino de entes ideales: ni Aristóteles ni Platón, ni el empirismo ni el racionalismo. Hay una tercera vía. Las verdades geométricas se basan en la *intuición pura* del espacio, que está determinada por nuestra constitución como sujetos de conocimiento. Cuando percibimos algo externo, lo percibimos como algo espacial, pero es nuestra propia constitución la que determina las leyes del espacio, que son las leyes de Euclides[20]. Quizá las «cosas mismas» no sean espaciales ni temporales, pero nosotros no podemos percibirlas más que como fenómenos espaciales y temporales.

Continuaremos discutiendo este problema en la Jornada 3.ª, si bien ya puedo adelantar que ninguna de las soluciones anteriores me resulta convincente. En particular, la idea de Kant, pese a ser muy conocida, reconocida y difundida, resulta sumamente problemática y paga un precio demasiado alto. Téngase en cuenta que Kant considera la geometría euclidea válida a priori, pero a costa de decretar (dogmáticamente) que el espacio es *meramente* una forma de la percepción, y que por tanto no nos informa en absoluto sobre la realidad externa. Extraña idea.

Se ha hablado mucho de la «matematización de la naturaleza» en el período de la Revolución Científica, esto es, entre 1500 y 1700 (aprox.); la expresión nos viene del filósofo E. Husserl. Bajo esa rúbrica es habitual discutir algunas facetas clave de los procesos de cambio en el conocimiento que se dieron durante esa época. Pero la rúbrica no es ingenua: presupone un abismo que separa «lo matemático» de «la naturaleza» y sugiere que, durante el proceso de «matematización», la realidad del mundo que nos rodea fue articulada en torno a esquemas matemáticos a costa de ser vaciada de ciertos significados o valores. Este es el sentido que tenía originalmente dicha expresión en la obra de Husserl, y también en la del historiador de la ciencia Koyré, quien fue discípulo de aquél. ¿Podemos dar por válido ese planteamiento de partida?

Dicho de otro modo: ¿hablaremos de «matematización» de la realidad física, o cabe pensar que se tratara de un proceso de *reconocimiento* de la Naturaleza matemática? Creo que una parte del problema debe ser tratada en estos términos. Si limitamos nuestra consideración a la astronomía (que en todo caso fue la mayor *escuela* del pensamiento científico moderno), podemos defender que los desarrollos que se dieron entre Copérnico (1543) y Newton (1687), pasando por Kepler en 1609, representaron el reconocimiento de que

20. Recomiendo leer Kant, *Prolegómenos* (2010 [1783]), Parte I: «¿Cómo es posible la matemática pura?».

los movimientos planetarios en el sistema solar se ajustan a leyes matemáticas (geométricas y mecánicas) muy precisas[21]. Aquí no hay una «matematización» de algo no matemático, en sí, sino más bien el reconocimiento de cómo son las relaciones y propiedades clave en un cierto sistema físico.

Al decir esto, no prejuzgo que sea falsa la idea de Husserl, quien razonaba que la articulación del mundo físico en torno a esquemas matemáticos vino acompañada del vaciamiento de ciertos significados o valores. Pero la presentación habitual de estos asuntos es demasiado esquemática, está pintada a brocha gorda. En el siglo XVII comenzó a expandirse una concepción mecanicista de la naturaleza, o de grandes áreas de la naturaleza, que sin duda implicó el abandono de concepciones organicistas o simbolistas anteriores (por ejemplo, la idea del paralelismo microcosmos-macrocosmos). Dicha concepción estableció una dinámica de cierto conflicto con muchas valoraciones metafísicas o religiosas del período anterior. Pero creo que es equivocado presentar el abandono de esas concepciones y valores como un simple efecto del enfoque geométrico-mecánico de Galileo o de Newton. El proceso fue más complejo, e intervinieron otros factores en esos intensos cambios *valorativos* (entre los que cabe mencionar el ascenso del capitalismo y la economía de mercado) que en absoluto fueron efectos de la matematización.

Yendo aún más allá, ¿cabría incluso hablar de una «naturalización» de las matemáticas? En algún sentido, creo que la respuesta debe ser positiva –al menos en parte–. Los siglos XVII y XVIII vieron la incorporación de nuevas ideas y métodos en matemáticas, directamente motivados y estimulados por el estudio de ciertos fenómenos físicos. Pienso sobre todo en los métodos del cálculo infinitesimal y en la idea de función, cuyo desarrollo vino estimulado por todo tipo de problemas mecánicos; se pueden dar ejemplos muy sofisticados como son las series de Fourier, que nacieron con el estudio de problemas de difusión del calor[22]. Durante ese período de la Modernidad temprana, el ir y venir de ideas, problemas y métodos entre las matemáticas y las ciencias físicas tuvo tantas consecuencias para un lado como para el otro. Es verdad que la imagen física del Universo se hizo más matemática, sobre todo en lo relativo a los fenómenos

21. Es algo análogo al reconocimiento de que la Tierra es aproximadamente esférica, aunque resulte más complejo; ¿era ese reconocimiento una «matematización» de la Tierra? Es absurdo decir esto.

22. Joseph Fourier publicó su *Teoría analítica del calor* en 1822, y en esa obra desarrolló sus ideas sobre las series infinitas de senos y cosenos que llevan su nombre.

astronómicos y algunos otros (ópticos, mecánicos, eléctricos). Pero también es verdad que, como dijo Poincaré, «la física no solo nos ha forzado a elegir entre una gran multitud de problemas; nos ha impuesto [a los matemáticos] problemas que, sin ella, nunca habríamos llegado siquiera a imaginar»[23].

Lecturas recomendadas

La bibliografía disponible sobre estos temas es enorme, de manera que solo es posible aquí ser muy selectivo. Dos trabajos históricos que arrojan luz y dan más detalles sobre lo discutido, son el de A. Koyré, *Del mundo cerrado al universo infinito* (1999) y de M. Kline, *La pérdida de la certidumbre* (1985). Sobre los orígenes históricos de la geometría, puede verse *The Cambridge History of Science*, vol. 1, *Ancient Science* (2018), que incluye un cap. sobre China a cargo de Karine Chemla.

Sobre Euclides, recomiendo el libro de Ana Millán Gasca, *Euclides: la fuerza del razonamiento matemático* (2004), pero ante todo la lectura directa de los *Elementos* (1991). Un análisis avanzado es el de K. Manders, «The Euclidian diagram» (2008).

Con respecto a los problemas filosóficos, me limitaré a mencionar el libro de I. Hacking, *Why is there philosophy of mathematics at all?* (2014) y sobre todo dos grandes clásicos: I. Kant, *Prolegómenos* (2010 [1783]) y H. Poincaré, *Ciencia e hipótesis* (2002 [1902]).

Para terminar, en relación a la geometrización del conocimiento físico, sugiero dos lecturas muy diversas: la Jornada 3.ª de Galileo Galilei, *Consideraciones [...] en torno a dos nuevas ciencias* (1976 [1638], pág. 265); y un breve artículo periodístico de Einstein sobre Kepler: «Johannes Kepler», en *Mis ideas y opiniones* (2000).

23. Véase «El análisis y la física», cap. V de H. Poincaré (1964 [1905]), *El valor de la ciencia*, pág. 80.